المحاضرة السادسة

معادلة فريدهولم المتجانسة

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

$f(x) = 0$ عندئذٍ $f_i = 0$

$$g(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(x)$$

$$\lambda \sum_{j=1} \alpha_{ij}\, c_j = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

من اجل λ ليست قيمة خاصة $D(\lambda) \neq 0$

للمعادلة (1) لا تملك سوى الحل الصفري $g(x) = 0$

أما في حالة λ قيمة خاصة عندئذٍ المعادلة

(1) المتجانسة تملك حلول مختلفة عن

الصفر (عدد لا نهائي من الحلول)

ملاحظة   ص 76

من اجل $\lambda = \lambda_1$ القيمة الخاصة حل

المعادلة المتجانسة يعطى بالدستور

$$g_1(x) = \lambda_1 c_1 a_1(x) + \lambda_1 c_2 a_2(x) + \ldots + \lambda_1 c_n a_n(x)$$

ومن ثم التوابع الخاصة الموافقة للقيمة

الخاصة هي

$$g_1^{(1)}(x) = \lambda_1 a_1(x),\ g_1^{(2)}(x) = \lambda_1 a_2(x),\ \ldots,\ g_1^{(n)}(x) = \lambda_1 a_n(x)$$

ملاحظة هامة:

منقولة المعادلة المتجانسة هو عبارة عن

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\, \psi(t)\, dt$$

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, b_i(x)$$

علماً أن c_i هنا تتحدد في الدستور

$$\boxed{\lambda \sum \alpha_{ki}\, c_k = c_i}$$

نظرية فريدهولم

اذا كان لدينا المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, g(t)\, dt$$

عندئذ نميز حالتين

الحالة الاولى: λ ليست قيمة خاصة للنواة $k(x,t)$ اي $D(\lambda) \neq 0$ عندئذ تكون المعادلة التكاملية المتجانسة المرافقة للمعادلة المعطاة وتقبل الحل الصفري ويكون للمعادلة المعطاة الاصلية حل وحيد

الحالة الثانية: λ قيمة خاصة اي $D(\lambda) = 0$ عندئذ تكون للمعادلة المتجانسة المرافقة للمعادلة المعطاة حلول غير الحل الصفري (عدد لا نهائي من الحلول) هذه الحلول تشكل فضاء ذات بعد منتهي كما تكون للمعادلة هذه المعادلة المتجانسة كذلك حلول غير الحل الصفري تشكل فضاء له البعد نفسه

اذا كانت $g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), \ldots, g^{(n)}(x)$ قاعدة لمجموعة الحلول الاولى والمجموعة $\psi^{(1)}(x), \psi^{(2)}(x), \ldots, \psi^{(p)}(x)$ قاعدة لمجموعة الحلول الثانية مشتركة بالبعد ولكي تكون المعادلة التكاملية المعطاة (الغير متجانسة) حل هو ان تحقق الشروط الاتية

$$\int_a^b \psi^{(i)}(x)\, f(t)\, dt = 0 \quad ★$$

لكل i

ويكون الحل العام هو مجموع حل خاص الى تركيب خطي ويكون الحل العام في الدوال $g^{(i)}(x)$ وعندما لا تتحقق العلاقة ★ فالمعادلة المعطاة لا تحقق اي حل

مثال: اوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = e^{2x} + \lambda \int_0^1 e^{x-t}\, g(t)\, dt \quad (1)$$

سبق وحلينا هذا المثال بطريقة الحلول التكرارية

$$g(x) = e^{2x} + \frac{\lambda e^{x}(e-1)}{1-\lambda} \qquad |\lambda| < 1$$

الحل:

$$k(x,t) = e^{x-t} = e^{x} \cdot e^{-t}$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, a_i(x)$$

$$a_1(x) = e^{x} \qquad b_1(t) = e^{-t}$$

$$g(x) = e^{2x} + \lambda c_1 e^{x} \quad (2)$$

$$f_i + \lambda \sum^{1} \alpha_{ij}\, c_j = c_i$$

$$f_1 + \lambda \alpha_{11} c_1 = c_1 \quad (3)$$

$$f_1 = \int_a^b b_1(t)\, f(t)\, dt$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t)\, a_j(t)\, dt$$

$$f_1 = \int_0^1 e^{-t} \cdot e^{2t}\, dt = \int_0^1 e^{t}\, dt = e - 1$$

$$\boxed{f_1 = e - 1}$$

$$\alpha_{11} = \int_0^1 e^{-t} \cdot e^{t}\, dt = 1 \qquad \boxed{\alpha_{11} = 1}$$

نعوض في (3)

$$e - 1 + \lambda c_1 = c_1$$

$$(1-\lambda)\, c_1 = e - 1 \Rightarrow c_1 = \frac{e-1}{1-\lambda}$$

$$\alpha_{12} = \int_{-1}^{1} T^3 \cdot (4T^2 + 3T)\, dT$$

$$= \int_{-1}^{1} 4T^5 + 3T^4\, dT$$

$$= 6\int_0^1 T^4\, dT = 6\,\frac{T^5}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\boxed{\alpha_{12} = \frac{6}{5}}$$

$$\alpha_{21} = \int_{-1}^{1} T\, 5T\, dT = \int_{-1}^{1} 5T^2\, dT$$

$$= 10\int_0^1 T^2\, dT = \frac{10}{3}$$

$$\boxed{\alpha_{21} = \frac{10}{3}}$$

$$\alpha_{22} = \int_{-1}^{1} T \cdot (4T^2 + 3T)\, dT$$

$$= \int_{-1}^{1} 4T^3 + 3T^2\, dT = 3\int_{-1}^{1} T^2\, dT$$

$$6\int_0^1 T^2\, dT = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{22} = 2}$$

نعوض في (3)

$$2\lambda C_1 + \frac{6}{5}\lambda C_2 = C_1 \quad (\times 5)$$
$$\frac{10}{3}\lambda C_1 + 2\lambda C_2 = C_2 \quad (\times 3) \Rightarrow$$

$$10\lambda C_1 + 6\lambda C_2 = 5C_1$$
$$10\lambda C_1 + 6\lambda C_2 = 3C_2$$

ننقل للطرف الثاني

$$(5 - 10\lambda)C_1 - 6\lambda C_2 = 0$$
$$10\lambda C_1 + (3 - 6\lambda)C_2 = 0 \quad (4)$$

$$C_1 = \frac{e-1}{1-\lambda} \qquad \lambda \neq 1$$

$$g(x) = e^{2x} + \frac{\lambda(e-1)}{1-\lambda} e^x$$

(1) مثال: أوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (5xT^3 + 4x^2T + 3xT)\, g(t)\, dt$$

$$f(x) = 0$$

$$k(x,T) = 5xT^3 + 4x^2T + 3xT$$
$$= 5xT^3 + (4x^2 + 3x)T$$

$$a_1(x) = 5x \qquad b_1(t) = T^3$$
$$a_2(x) = 4x^2 + 3x \qquad b_2(t) = T$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} C_i a_i(x)$$

$$g(x) = \lambda C_1 a_1(x) + \lambda C_2 a_2(x)$$
$$g(x) = 5\lambda C_1 x + \lambda C_2 (4x^2 + 3x) \quad (2)$$

نحسب C_1, C_2

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} C_j = C_i \qquad (f_i = 0)$$

$$\lambda \alpha_{11} C_1 + \lambda \alpha_{12} C_2 = C_1$$
$$\lambda \alpha_{21} C_1 + \lambda \alpha_{22} C_2 = C_2 \quad (3)$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(t)\, a_j(t)\, dt$$

$$\alpha_{11} = \int_{-1}^{1} T^3 \cdot 5T\, dT = 5\int_{-1}^{1} T^4\, dT$$

$$= 10\int_0^1 T^4\, dT = 10\,\frac{T^5}{5} = 2$$

$$\boxed{\alpha_{11} = 2}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-10\lambda & -6\lambda \\ -10\lambda & 3-6\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-10\lambda)(3-6\lambda) - (-6\lambda)(-10\lambda)$$

$$= 15 - 60\lambda$$

$D(\lambda) = 0$

$15 - 60\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

وهنا نجد ما يلي حسب نظرية فريدهولم البديلة الأولى

$D(\lambda) \neq 0 \Leftarrow \lambda \neq \frac{1}{4}$

بالتالي $g(x) = 0$

الحالة الثانية

$D(\lambda) = 0 \Leftarrow \lambda = \frac{1}{4}$

نعوض λ في ④ نجد

$(5 - \frac{5}{2})c_1 - \frac{3}{2}c_2 = 0$

$-\frac{5}{2}c_1 + (3 - \frac{3}{2})c_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} 5c_1 - 3c_2 &= 0 \\ -5c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

بالتالي نجد أن $\Rightarrow c_1 = \frac{3}{5}c_2 \quad \forall c_2$

بالتالي المعادلة عدد لانهائي من الحلول

نعوض في ②

$g(x) = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} c_2 x + c_2(x^2 + \frac{3}{4}x)$

$g(x) = (x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x)c_2$

$g(x) = ((x^2 + \frac{3}{2}x)c_2 \quad \forall c_2$

مثال ثالث أوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = 1 + \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x+T)\, g(T)\, dT \quad ①$$

$k(x,T) = \cos(x+T) = \cos x \cos T - \sin x \sin T$

$a_1(x) = \cos x \qquad b_1(T) = \cos T$

$a_2(x) = -\sin x \qquad b_2(T) = \sin T$

$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i a_i(x)$

$g(x) = 1 + \lambda c_1 \cos x - \lambda c_2 \sin x \quad ②$

$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} c_j = c_i$

$$\left.\begin{aligned} f_1 + \lambda\alpha_{11}c_1 + \lambda\alpha_{12}c_2 &= c_1 \\ f_2 + \lambda\alpha_{21}c_1 + \lambda\alpha_{22}c_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} ③$$

$f_i = \int_a^b b_i(T) f(T)\, dT$

$\alpha_{ij} = \int_a^b b_i(T) a_j(T)\, dT$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \int_0^{2\pi} \cos T\, dT = 0 \\ f_2 &= \int_0^{2\pi} \sin T\, dT = 0 \end{aligned}\right\} f_i = 0$$

$\alpha_{11} = \pi \qquad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 \qquad \alpha_{22} = -\pi$

نعوض في ③

$\lambda\pi c_1 = c_1 \Rightarrow (1 - \lambda\pi)c_1 = 0$

$-\lambda\pi c_2 = c_2 \Rightarrow (1 + \lambda\pi)c_2 = 0 \quad ④$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\pi & 0 \\ 0 & 1+\lambda\pi \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda\pi)(1+\lambda\pi)$$

$D(\lambda) = 0$

$(1-\lambda\pi)(1+\lambda\pi) = 0$

$\lambda = \pm \frac{1}{\pi}$

نميز حالتين

الاولى $D(\lambda) \neq 0$ $\quad \lambda \neq \pm \frac{1}{\pi}$

من نظرية فريدهولم المعادلة المعطاة تملك حل وحيد هو الحل

$C_1 = 0 \quad C_2 = 0$

نبدل في (2) $\quad g(x) = 1$

وهو المطلوب

الثانية نميز حالتين

(a) $\lambda = \frac{1}{\pi}$ نبدل في (4) نحصل

$$\left.\begin{array}{l} 0C_1 = 0 \\ 2C_2 = 0 \end{array}\right\} \forall C_1 \quad C_2 = 0$$

المعادلات الجبرية متحققة

اي ان المعادلة المعطاة تملك عدد لانهائي من الحلول نبدل في (2)

$g(x) = 1 + \frac{1}{\pi} C_1 \cos x \quad \forall C_1$

(b) $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ نبدل في 4

$$\left.\begin{array}{l} 2C_1 = 0 \\ 0C_2 = 0 \end{array}\right\} \forall C_2 \quad C_1 = 0$$

المعادلة تملك عدد لانهائي من الحلول

نعوض في (2) نحصل على

$g(x) = 1 + \frac{1}{\pi} C_2 \sin x$

وهو المطلوب

طريقة ثانية

في الحالة الثانية نميز حالتين

$\lambda = \frac{1}{\pi}$ حتى تكون للمعادلة (1) حل يجب ان يتحقق الشرط التالي

$\int \psi(x) f(x)\, dx = 0 \quad \#$

$\psi(x)$ حل مقبول للمعادلة التكاملية المتجانسة

بما ان النواة متناظرة هذا يعني ان حل المعادلة المتجانسة هو حل مقبول المعادلة المتجانسة $\psi(x) = g(x)$ للمعادلة المتجانسة

حل المعادلة المتجانسة

المعادلات المتجانسة الموافقة لـ (4)

هي نفسها في هذه الحالة

$$\left.\begin{array}{l} 0C_1 = 0 \\ 2C_2 = 0 \end{array}\right\} \forall C_1 \quad C_2 = 0$$

نبدل في حل المعادلة المتجانسة

$g(x) = \lambda C_1 \cos x - \lambda C_2 \sin x$

$g(x) = \frac{1}{\pi} C_1 \cos x \quad \forall C_1$

بالتالي $\psi(x) = \frac{1}{\pi} C_1 \cos x$

نعوض #

$$\frac{C_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0$$

المعادلة تملك عدد لانهائي من الحلول

حل (4) في اجل $\lambda = \frac{1}{\pi}$ هو

$C_2 = 0 \quad \forall C_1$

نعوض في ② $g(x) = 1 + \frac{4}{\pi} C_1 \cos x$

$\lambda = -\frac{1}{\pi}$ بنفس الطريقة

الطريقة الاولى اسهل

ملاحظة

اذا كانت λ ليست قيمة خاصة

$P(\lambda) \neq 0$ وحصلنا $f_i = 0$

عندئذ المعادلة التكاملية غير المتجانسة

تملك حل وحيد

النواة المتناظرة للمعادلات التكاملية

نقول عن النواة $K(x,T)$ انها متناظرة

اذا بدلنا كل x بـ T وكل T بـ x

ولم تتغير $K(x,T) = K(T,x)$

سندرس فيما يلي بعض الخواص المتعلقة

بالمعادلات التكاملية ذات النواة المتناظرة

الخاصة الاولى

تكامل جداء تابعين خاصين موافقين

لقيمتين خاصتين مختلفتين على المجال

الاساسي $[a,b]$ يساوي الصفر

البرهان

لتكن λ_1, λ_2 قيمتين خاصتين مختلفتين

ولتكن التابعين الخاصين الموافقين $g_1(x), g_2(x)$

لها على الترتيب عندئذ

$$\frac{1}{\lambda_1} g_1(x) = \int_a^b K(x,T)\, g_1(T)\, dT$$

$$\frac{1}{\lambda_2} g_2(x) = \int_a^b K(x,T)\, g_2(T)\, dT$$

نضرب العلاقة الاولى بـ $g_2(x)$ والعلاقة الثانية بـ $g_1(x)$ ، ونكامل بالنسبة لـ x على المجال $[a,b]$

ونطرح العلاقتين

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \int_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, dx =$$

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(x,T)\, g_1(T)\, dT \right] g_2(x)\, dx$$

$$- \underbrace{\int_a^b \left[\int_a^b K(x,T)\, g_2(T)\, dT \right] g_1(x)\, dx}_{I}$$

نبدل في I كل x بـ T وكل T بـ x

$$I = \int_a^b \left[\int_a^b K(T,x)\, g_2(x)\, dx \right] g_1(T)\, dT$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(T,x)\, g_1(T)\, dT \right] g_2(x)\, dx$$

وبما ان النواة متناظرة نحصل على

$$I = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,T)\, g_1(T)\, dT \right] g_2(x)\, dx$$

نبدل I بقيمتها فنحصل على

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \int_a^b g_1(x)\, g_2(x)\, dx = 0$$

بما ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ فان $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \neq 0$

$$\int_a^b g_1(x)\, g_2(x) = 0$$

الخاصة الثانية: جميع القيم الخاصة حقيقية و التوابع الخاصة الموافقة للقيم الخاصة للنواة $K(x,t)$ المعادلة التكاملية المتجانسة هي نفس التوابع الخاصة لمنقول المعادلة المتجانسة وأيضاً حل منقول المعادلة المتجانسة هو نفسه حل المعادلة المتجانسة

البرهان

نفرض جدلاً أن λ_0 هي قيمة خاصة عقدية ذات جزء تخيلي غير معدوم وأن $g_0(x)$ التابع الخاص الموافق لا والذي لا يمكن له أن يكون معدوماً استناداً إلى التعريف

$$g_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\, g_0(t)\, dt$$

وإذا انتقلنا إلى الكميات المرافقة في هذه المعادلة التكاملية نحصل على

$$\overline{g_0(x)} = \overline{\lambda_0} \int_a^b K(x,t)\, \overline{g_0(t)}\, dt$$

ومنه نجد أن $\overline{\lambda_0}$ هي قيمة خاصة وأن $\overline{g_0(x)}$ التابع الخاص الموافق لـ
وبما أن λ_0 ليس حقيقياً فإن $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$
وعلى التابعين $\overline{g_0(x)}$, $g_0(x)$ أن
حسب الخاصة الأولى

$$\int_a^b g_0(x)\, \overline{g_0(x)}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b |g_0(x)|^2\, dx = 0$$

ومن نظرية نحصل على $g_0(x) = 0$

وهذا مخالف للفرض

ملاحظة هامة

في حالة $K(x,t)$ نواة متناظرة عندئذ المعادلات الجبرية لمنقول المعادلة المتجانسة الموافق للمعادلة المعطاة هي المعادلات الجبرية نفسها للمعادلة المتجانسة